



Desarrollo de un Indicador de Actividad Económica Regional y Pronósticos del Valor Agregado Bruto: El Caso de Loreto

FRITZ GIAN PIER ALVA DA SILVA Y MARIO ANDRÉ LÓPEZ ROJAS*

Haciendo uso de un modelo de factor dinámico bayesiano y utilizando series económicas con frecuencia mixta se obtiene una herramienta para la estimación trimestral latente no observada de la actividad económica de Loreto. Asimismo, ello permite generar pronósticos de manera adelantada a la publicación oficial correspondiente al Valor Agregado Bruto anual de la región. Los resultados muestran que el indicador de actividad económica es coincidente con el comportamiento económico regional y nacional. Además, se evidencia que los pronósticos sobre el Valor Agregado Bruto de Loreto tienen un buen nivel de precisión ya que los pronósticos se desvían en promedio un 1,5% (resultado de la raíz del error cuadrático medio – RECM) de los datos reales.

Palabras clave : Factor dinámico bayesiano, actividad económica, Valor Agregado Bruto, proyección, RECM.

En el rubro de la macroeconomía, los economistas nos enfrentamos a una amplia gama de variables macroeconómicas para buscar inferir el comportamiento del ciclo económico en el que nos encontramos. Para Burns y Mitchell (1946), el ciclo económico consiste en expansiones, contracciones y recuperaciones agregadas que ocurren en distintas variables macroeconómicas (empleo, producción, ventas, etc.). Por la década de 1930, Burns y Mitchell y el equipo de la Oficina Nacional de Investigación Económica de Estados Unidos (NBER, por sus siglas en inglés) identificaron una serie de indicadores que coincidían, anticipaban y rezagaban el ciclo económico estadounidense. Desde su creación, estos indicadores han desempeñado un papel importante en la identificación del estado de la actividad macroeconómica estadounidense en el corto plazo. Actualmente, *The Conference Board* publica mensualmente el indicador coincidente de Estados Unidos.

En este sentido, en la actualidad resulta de gran interés conocer en qué estado se encuentra la actividad económica de una zona geográfica, ya que ello puede ser de gran ayuda a los diseñadores de política para

* Alva: Banco Central de Reserva del Perú – Sucursal Iquitos (correo electrónico: fritz.alva@bcrp.gob.pe). López: Banco Central de Reserva del Perú – Sucursal Iquitos (correo electrónico: mario.lopez@bcrp.gob.pe).

Los autores agradecen los valiosos comentarios y sugerencias de Andrés Gatty, Vladimir Chong y Miguel Cabello. Los puntos de vista expresados en este documento de trabajo corresponden a los autores y no reflejan necesariamente la posición de las instituciones a las cuales están afiliados.

identificar las fuentes subyacentes de las fluctuaciones agregadas. Esto a su vez contribuiría a diseñar políticas que promuevan la estabilidad macroeconómica. Sin embargo, en la actualidad de la realidad peruana, no existen muchos indicadores que otorguen esa información a nivel regional, de hecho solo existe uno que busca explicar en qué situación se encuentra el nivel de producción agregada trimestral de cada departamento.

En el Perú, el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) viene publicando desde el 2017 de manera trimestral un Indicador de Actividad Productiva Departamental (IAPD). Dicho indicador tiene como meta informar sobre el comportamiento contemporáneo de la actividad productiva de las economías regionales o departamentales. No obstante, lo publica con un rezago de aproximadamente dos meses y medio. Además de ello, el IAPD no es un indicador que considere el comportamiento de los factores de demanda que presentan los departamentos, sino que más bien se concentra en la producción sectorial de las industrias (agricultura, construcción, otros servicios, etc.) caracterizando así una medición de factores de oferta. Sin embargo, en el presente artículo se busca desarrollar un indicador de actividad económica (IAE) general que considere información proveniente tanto de factores de oferta como de demanda, y que de esta manera muestre cuál es el estado de la economía en el corto plazo. Asimismo, este indicador permite realizar proyecciones con una buena precisión sobre el Valor Agregado Bruto (VAB) de la región.

De esta manera, la contribución principal del presente artículo recae en dos objetivos. El primero consiste en estimar un Indicador de Actividad Económica (IAE), el cual otorgue señales sobre el estado de la economía regional en el corto plazo considerando factores de oferta y de demanda. El segundo objetivo se desglosa del primero en el sentido de que se utilizarán estimaciones suavizadas del IAPD como insumo para el desarrollo de un predictor óptimo del VAB anual de Loreto.

La estructura del documento es la siguiente: La [sección 1](#) aborda los antecedentes relacionados a la presente investigación. La [sección 2](#) expone los hechos estilizados relacionados al ciclo económico de la región Loreto. La [sección 3](#) presenta la metodología econométrica utilizada, y la [sección 4](#) muestra los datos empleados para las estimaciones. En la [sección 5](#) se detallan los resultados obtenidos. Finalmente, en la [sección 6](#) se exhiben las conclusiones.

1. ANTECEDENTES

[Terrones y Calderón \(1993\)](#) buscan explicar el ciclo económico del Perú estudiando el comportamiento macroeconómico clasificado por sectores. De esta manera, se plantea que las variables reales como la inversión y el consumo son procíclicas, mientras que por otro lado el empleo no sigue un patrón cíclico determinado. Con respecto a las variables nominales como los precios y la masa monetaria, los primeros presentan un comportamiento más volátil que el producto y levemente contra cíclico, mientras que la masa monetaria cuenta con un comportamiento procíclico débil y difuso.

[Aruoba y Sarikaya \(2013\)](#) desarrollan un indicador de actividad económica a través de la metodología de factores dinámicos con el objetivo de brindar información sobre un seguimiento al ciclo económico de la economía turca. Dentro del estudio, se incluye la posibilidad de que tal indicador otorgue señales sobre la economía en tiempo real utilizando datos de variables macroeconómicas con disponibilidad diaria. Asimismo, los autores incluyen un indicador de recesión que se caracteriza por detectar periodos recesivos a través de una persistencia negativa en las bandas de confianza de la estimación del factor dinámico.

[Winkelried \(2017\)](#) desarrolla una investigación que llevó como primer objetivo explicar los ciclos económicos en el Perú durante el periodo 1992–2016 haciendo uso de 145 indicadores sobre actividad económica. En segundo lugar, buscó estudiar cómo se asocian estos indicadores económicos con el ciclo económico de referencia, el cual define como la alternativa de fases en estado de la economía (la cual a su vez se manifiesta en el comovimiento de una gran cantidad de indicadores que recogen distintas

dimensiones de la actividad). De esta manera, se logra evidenciar que los ciclos económicos de la década de 1990 son más volátiles y de menor duración que los registrados en la década del 2000. Adicionalmente a ello, durante los años 2013–2015 se presenta la fase de contracción económica más duradera en la cronología definida.

Pérez y Brens (2018) desarrollan un indicador a través de un modelo de factor dinámico para pronosticar la actividad económica en tiempo real. En tal modelo se verifica que la serie del factor común reacciona coincidentemente a la dinámica observada del indicador oficial de actividad económica que se busca pronosticar. Ante ello, se determina que el mejor modelo para pronosticar el indicador oficial es un modelo de combinación de proyecciones ya que otorga menores valores referentes al error cuadrático medio.

Gil y otros (2019) utilizan modelos de factores dinámicos para generar estimaciones del crecimiento del PBI a corto plazo considerando economías regionales (Andalucía, Cataluña, Madrid y Comunidad Valenciana) de España. Emplean una perspectiva bayesiana para conseguir estimaciones robustas de todos los ingredientes de los modelos. De esta manera, se introducen los modelos de factor dinámico bayesiano que permiten incluir indicadores con observaciones no disponibles así como combinar series económicas que se encuentran en distintas frecuencias (mensuales y trimestrales, correspondientes a indicadores individuales y a las series de PBI regional, respectivamente). En este sentido el autor logra obtener cuatro indicadores de actividad económica para las respectivas regiones de España, así como también logra estimar el PBI latente mensual no observado de tales regiones. Los resultados que se obtienen reflejan coherencia con el entorno económico tanto de los indicadores de actividad económica como de las estimaciones latentes del PBI.

2. HECHOS ESTILIZADOS

Es pertinente recordar que en el presente trabajo no se realiza un estudio exhaustivo o técnico sobre los hechos estilizados de Loreto. Sin embargo, resulta interesante mencionar algunos de estos hechos identificados por otros investigadores. En ese sentido, Mendoza y Gallardo (2012) exponen que la economía loreтана presentó cuatro etapas en su PBI real per cápita desde 1970 hasta 2010. Ante ello, se destaca la primera etapa de Loreto (1970–1980) en donde se partió del menor nivel de PBI per cápita (cerca de S/ 2 000) hasta alcanzar su mayor valor, en todo el horizonte de análisis, en 1980 con un monto de S/ 6 800 (a precios constantes de 1994). Por otro lado, durante la segunda etapa la región experimentó un declive en su producción per cápita debido a descensos en la producción petrolera y a la separación administrativa de Loreto y Ucayali ocurrida legalmente en 1980. De esta manera, en esta etapa Loreto presentó una tasa de crecimiento promedio negativa de -6,4%.

Durante la tercera etapa (1992–2001) hasta el final de la muestra, Loreto experimentó una recuperación en su PBI per cápita y comenzó a otorgar señales de un crecimiento sostenido, presentando así cifras alentadoras tanto en su tasa de crecimiento de producción per cápita como en su tasa de crecimiento de producción bruta, las cuales fueron de 2,5% y 4,3%, respectivamente. Ello se explica principalmente por el buen desenvolvimiento productivo de los sectores comercio, otros servicios y manufacturas.

Siguiendo con el análisis y acercándonos más a la actualidad, Hausmann y otros (2020) muestran que Loreto se encuentra entre los departamentos más pobres del país, presentando un VAB per cápita de S/ 10 462 (a precios constantes de 2007) que es la cuarta menor magnitud entre todas las demás regiones. Asimismo, Loreto tiene más desarrollados los sectores de servicios y de comercio, en contraste con los sectores de construcción y manufactura, los cuales son los menos productivos.

De esta manera, el departamento de Loreto a diferencia de otras regiones como San Martín y Amazonas, en lugar de converger al nivel del ingreso per cápita nacional se empobreció más en términos relativos.

Citando a Hausmann y otros (2020), “en la última década (2008-2018) el valor bruto por habitante de Loreto (0,6% anual) no solo ha crecido más de cuatro veces menos que el resto de Perú (2,5%) y cinco veces menos que los demás departamentos amazónicos del país (2,9%), sino que además se ha hecho muy volátil. A ese ritmo de crecimiento, Loreto demoraría 115 años en duplicar el tamaño de su economía y nunca alcanzaría el nivel de ingreso nacional”.

3. METODOLOGÍA

3.1. MODELO DE FACTOR DINÁMICO BAYESIANO

Para el cálculo y desarrollo del primer objetivo, como herramienta cuantitativa se tomarán como referencia las metodologías planteadas por Stock y Watson (1988) y por Mariano y Murasawa (2003), los cuáles estudian modelos catalogados como indicadores coincidentes. A diferencia de lo planteado por Stock y Watson (1988), los cuales utilizan netamente información mensual e ignoran información concerniente a indicadores trimestrales, en el presente artículo se utiliza información expresada en distintas frecuencias. Asimismo, Mariano y Murasawa (2003) sí utilizan información sobre indicadores en frecuencias diferentes pero el método de estimación es vía máxima verosimilitud. En el caso del presente artículo, la estimación se realiza mediante técnicas bayesianas y considerando la disponibilidad de los datos. Además de ello, los datos que se trabajan aquí son de frecuencia anual y trimestral, a diferencia de trimestral y mensual que es lo que utilizan los autores mencionados. De acuerdo a ello, el instrumento econométrico a utilizar será el Filtro de Kalman con la incorporación de un factor común dinámico, que permitirá representar el comportamiento de variables no observables.

En macroeconomía, una aproximación para estudiar las fluctuaciones agregadas se logra al escoger series de tiempo relevantes (por ejemplo el nivel de empleo) para posteriormente analizarlas y pronosticarlas. Sin embargo, para la perspectiva del ciclo económico, esta aproximación es limitada ya que dichas series individuales miden más o menos conceptos teóricos que están bien definidos (como por ejemplo el nivel de empleo formal en un determinado periodo de tiempo). Es decir, estas solamente miden varias facetas del estado de la actividad económica, pero ninguna de ellas mide el estado de la economía directamente. Así, el presente estudio busca encontrar aquel elemento único común entre las variables de estudio y expresarlo en forma de un índice coincidente.

Ante ello, la presente investigación tratará como insumo relevante al VAB No Primario (VABNP) considerando que, según información oficial del INEI, para el caso de Loreto la producción de los sectores no primarios ha abarcado casi un 70% del VAB durante los últimos diez años en términos reales. Asimismo, el desarrollo del modelo a plantear permitirá la estimación latente no observada del VABNP durante los periodos entre cada año.

Partimos definiendo el VABNP como

$$Y_t = Y_t^* + Y_{t-1}^* + Y_{t-2}^* + Y_{t-3}^* \quad (1)$$

donde Y_t es el VABNP acumulado de la región Loreto de un año en específico y es observable, y Y_{t-i}^* ($i = 0,1,2,3$) es el VABNP de un trimestre determinado que no es observable.

De lo anterior podemos definir lo siguiente,

$$Y_t = 4 \left(\frac{Y_t^* + Y_{t-1}^* + Y_{t-2}^* + Y_{t-3}^*}{4} \right) \simeq 4(Y_t^* \cdot Y_{t-1}^* \cdot Y_{t-2}^* \cdot Y_{t-3}^*)^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

Ante pequeños cambios trimestrales, la diferencia entre la media aritmética y geométrica no es significativa, por ello

$$\ln(Y_t) = \ln(4) + \frac{1}{4}(\ln(Y_t^*) + \ln(Y_{t-1}^*) + \ln(Y_{t-2}^*) + \ln(Y_{t-3}^*)), \quad (3)$$

Siguiendo a [Mariano y Murasawa \(2003\)](#), se puede mostrar que $gy_t = \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-4})$ representa la variación año a año del VABNP y que $gy_t^* = \ln(Y_t^*) - \ln(Y_{t-4}^*)$ representa la variación anual del VABNP del trimestre t . De esta manera, se obtiene la siguiente ecuación:

$$gy_t = \frac{1}{4}gy_t^* + \frac{1}{4}gy_{t-1}^* + \frac{1}{4}gy_{t-2}^* + \frac{1}{4}gy_{t-3}^*. \quad (4)$$

Para proponer el modelo a trabajar, se evaluaron distintas series económicas agregadas en la región Loreto, de tal forma que tengan relación con el ciclo económico de Loreto, así como también la representación dentro del VABNP y la disponibilidad de la información en los sectores. Por tal motivo se utilizarán cuatro variables en frecuencia trimestral, las cuáles serán gasto del gobierno, crédito directo, consumo de electricidad y el indicador de actividad productiva (IAP¹). No se considerará al sector manufactura debido a que presenta constantes revisiones y tiene una alta correlación con el consumo de electricidad, además de que su inclusión perjudica a la precisión del IAE. De esta forma, debe notarse que se hará uso de información proveniente tanto de factores de demanda (gasto del gobierno, crédito directo y consumo de electricidad) como de oferta (VABNP y el IAP) puesto que se busca que el IAE pueda captar el comportamiento del estado de la economía considerando ambas fuerzas. Por tanto, de manera tentativa se puede proponer el siguiente modelo expresado en una representación espacio-estado:

- Representación Espacio

$$gy_t^* = \alpha_{gy^*} + \beta_{gy}x_t + u_{gy,t} \quad (5)$$

$$iap_t = \alpha_{iap} + \beta_{iap}x_t + u_{iap,t} \quad (6)$$

$$gp_t = \alpha_{gp} + \beta_{gp}x_t + u_{gp,t} \quad (7)$$

$$cd_t = \alpha_{cd} + \beta_{cd}x_t + u_{cd,t} \quad (8)$$

$$e_t = \alpha_e + \beta_e x_t + u_{e,t} \quad (9)$$

- Representación Estado

$$x_t = \rho_1 x_{t-1} + \varepsilon_{x,t} \quad (10)$$

$$u_{i,t} = \delta_i + \delta_i u_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}, \forall i \in \{gy^*, iap, gp, cd, e\} \quad (11)$$

Donde gy_t , iap_t , gp_t , cd_t y e_t , representan al valor agregado bruto no primario, indicador de actividad productiva, gasto público, crédito directo, y consumo de electricidad, respectivamente. Las variables están expresadas en variaciones logarítmicas y no en niveles. Esto se realiza para eliminar la presencia de tendencia estocástica y componentes estacionales. Se asume que solo existe una variable común no observada entre las series económicas. Dicha variable se expresa por x_t y representa al factor común dinámico que se entiende como un índice común no observado y coincidente en todas las series económicas propuestas. De esta manera, x_t es el Indicador de Actividad Económica (IAE). Debido a que no se observa y^* , el modelo

1 Corresponde al IAPD publicado por el INEI para la economía loreтана.

anterior no se puede estimar. No obstante, teniendo en cuenta la ecuación (4) se puede demostrar que, para $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, la ecuación (5) se puede expresar como,

$$gy_t = \alpha_{gy} + \beta_{gy} \left(\frac{x_t}{4} + \frac{x_{t-1}}{4} + \frac{x_{t-2}}{4} + \frac{x_{t-3}}{4} \right) + \frac{u_{gy,t}}{4} + \frac{u_{gy,t-1}}{4} + \frac{u_{gy,t-2}}{4} + \frac{u_{gy,t-3}}{4} \quad (11)$$

Por lo tanto, reemplazando la ecuación (11) en el sistema espacio-estado anterior por la ecuación (5), el modelo es estimable.

Asimismo, $u_{i,t}$ ($i = gy^*, iap, gp, cd, e$) representa al factor idiosincrático de cada una de las variables respectivas. Por otro lado, las variables que están medidas en soles como el gasto público y el crédito directo fueron deflactadas por el índice de precios al consumidor (IPC) de Loreto corregido por inflación.

El modelo anterior puede re expresarse mediante una representación matricial que caracteriza a un sistema espacio-estado para la aplicación del algoritmo del Filtro de Kalman. El detalle de la estimación y los procedimientos se encuentra en el Apéndice del presente artículo. Los parámetros del modelo son estimados maximizando numéricamente la función de densidad de probabilidad posterior para el vector que contiene tales parámetros.

3.2. MODELO DE PROYECCIÓN COMBINADA

Harvey (2006) propone una herramienta para combinar proyecciones con el objetivo de minimizar una función de pérdida cuadrática, la cual se puede representar en este caso como la forma funcional del error cuadrático medio (ECM). Ante ello se tiene que una proyección combinada se expresa como

$$y^c = (1 - \alpha)y_1 + \alpha y_2$$

donde y^c es la proyección combinada o ponderada, y_1 y y_2 son las proyecciones de los modelos 1 y 2, y α es el parámetro que designa los pesos a las proyecciones. Por lo tanto, el objetivo primordial recae en la determinación de un α óptimo que otorgue los mejores pesos para garantizar la mejor proyección. De esta manera se tiene lo siguiente

$$\alpha^* = \frac{var_1 - cov_{1,2}}{var_1 + var_2 - 2cov_{1,2}}$$

donde α^* es el peso óptimo, var_1 y var_2 son las varianzas de los errores de predicción (se obtienen comparando con los valores observados dentro de la muestra) de las proyecciones y_1 y y_2 . Por lo tanto, el cálculo de $cov_{1,2}$ es análogo.

Entonces, considerando la selección y el cálculo de un α^* , se tiene que el predictor óptimo es el y^c evaluado con tal parámetro, esto es

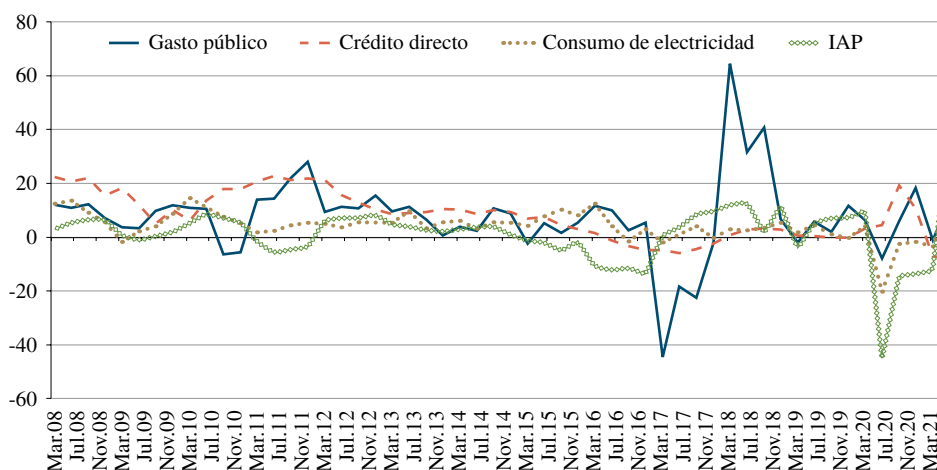
$$y^{c*} = (1 - \alpha^*)y_1 + \alpha^*y_2.$$

4. DATOS

Tal como se detalló en la sección de metodología, los datos a trabajar para la estimación el IAE de Loreto serán series económicas provenientes de los sectores de gasto público, crédito directo bancario

e interbancario, consumo de energía eléctrica y el indicador de actividad productiva, considerando información trimestral, y con frecuencia observada cada tres trimestres del VABNP. Estas series se muestran en los Gráficos 1 y 2.

GRÁFICO 1. *Gasto Público, Crédito Directo, Consumo de Electricidad e IAP, 2008 - 2021*
(Var. interanual)



FUENTE: MEF, SBS, Electroriente e INEI.

ELABORACIÓN: Propia.

En el Cuadro 1 se puede apreciar que las series no han presentado grandes cambios durante el periodo de tiempo analizado a excepción del gasto público el cual sufrió una caída abrupta en el año 2017. Esto se puede explicar debido al declive del canon petrolero en 2016. Consecuentemente a ello la serie experimenta un considerable crecimiento para el 2018, el cual se debe principalmente al efecto rebote, sumado al incremento del presupuesto institucional modificado de los años 2017 y 2018² que conllevó a un mayor gasto público.

CUADRO 1. *Correlación entre Gasto Público, Crédito Directo, Consumo de Electricidad e IAP*

(GP,CD)	(GP,CE)	(GP,IAP)	(CD,CE)	(CD,IAP)	(CE,IAP)
26.6%	22.1%	15.9%	28.6%	10.6%	57.98%

FUENTE: MEF, SBS, Electroriente e INEI.

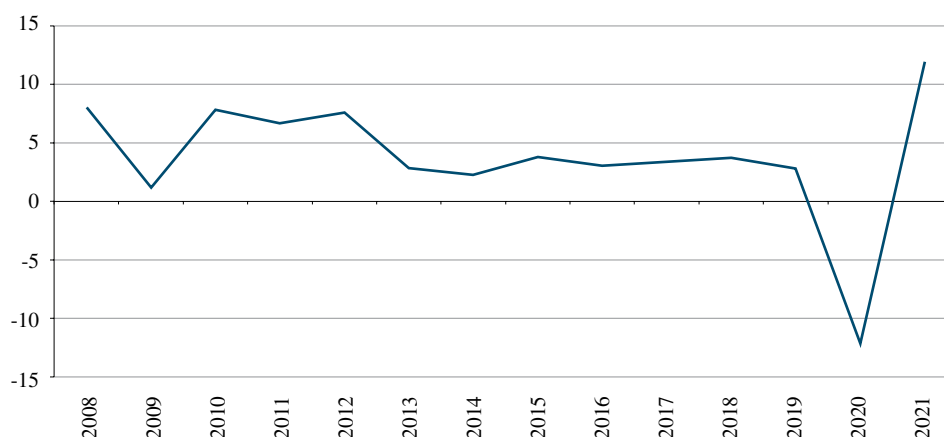
ELABORACIÓN: Propia.

Para el caso de las series trimestrales se puede observar la presencia de un comovimiento entre ellas, el cual no necesariamente se presenta de forma simultánea. Por ejemplo, se puede observar que el crédito y el consumo de electricidad presentan una mayor coincidencia, mientras que por otro lado se observa menos correlación entre el gasto público y el consumo de electricidad. Véase el Cuadro 1.

Para el caso de la serie del VABNP, en el Gráfico 2 se observa un comportamiento relativamente estable hasta el año 2019, presentando un crecimiento promedio de 3,16% desde la desaceleración en el año 2013. Sin embargo, para el año 2020 se presenta una caída 12,22% (cifra calculada por variación logarítmica), principalmente motivado por los impactos de paralización económica a causa de la propagación del virus de la COVID-19.

2 Según cifras oficiales publicadas por el Ministerio de Economía y Finanzas (MEF).

GRÁFICO 2. Crecimiento del VAB No Primario, 2008–2020.
(Var. interanual)



FUENTE: INEI.

ELABORACIÓN: Propia.

De esta manera se espera que la economía loreтана pueda recuperar los niveles de crecimiento previos, esto considerando que la economía no sufrió un deterioro permanente de los factores productivos sino una paralización temporal en la actividad económica. De todas maneras, el horizonte de restauración es incierto y dependerá mucho de la reincorporación de los desempleados al sector laboral y de la inversión privada, así como también de las políticas fiscales y monetarias que ejecuten las entidades pertinentes.

5. RESULTADOS

Antes de iniciar con el análisis de los resultados, se debe tener en cuenta la situación experimentada en el año 2020, en donde se presentó un episodio atípico como fue la propagación mundial del virus de la COVID–19. Es preciso mencionar este hecho ya que interfiere un poco con los resultados que se buscan obtener. Sin embargo, los mismos resultados logran un buen desempeño y coherencia con la realidad.

5.1. INDICADOR DE ACTIVIDAD ECONÓMICA

Teniendo en cuenta que la metodología econométrica a trabajar para la estimación de los parámetros ha sido guiada por la perspectiva bayesiana, se asumieron las funciones de distribución y los momentos de los parámetros del modelo. Para la selección de estos *priors* se tomó como referencia lo propuesto por [Stock y Watson \(1988\)](#) siguiendo el criterio de *smoothness priors*. Con respecto a ello, se realizó una primera estimación dentro de la muestra hasta 2019 en la cual se verificó que las distribuciones de las *priors* son coherentes con los resultados económicos. Por tal motivo, se decidió mantener dicho criterio con la particularidad de solo asignar una media menor al parámetro respectivo a la electricidad en la representación espacio del modelo.

Con referencia a la utilización de las distribuciones beta para los parámetros, se tuvo en consideración las ventajas que posee en cuanto a versatilidad y flexibilidad que permiten proporcionar una buena descripción de diferentes tipos de datos ([Ng y otros, 2018](#)).

CUADRO 2. Parámetros del Modelo Espacio–Estado

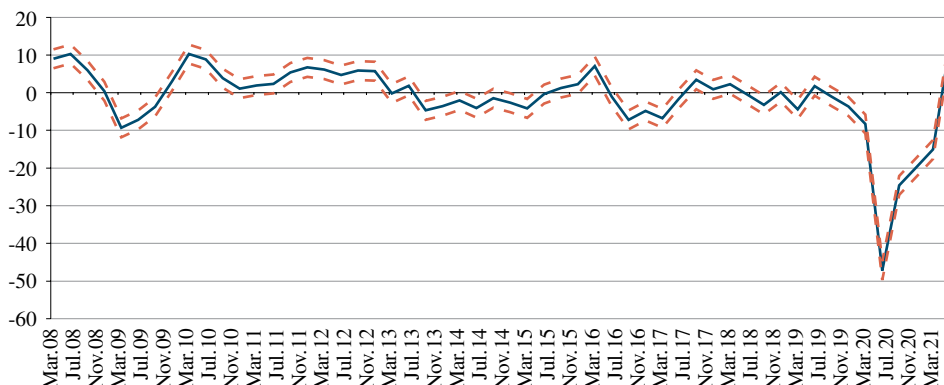
Muestra (2008 I – 2021 II)					
Parámetro	Distr.	Prior		Posterior	
		Media	D.E.	Moda	D.E.
α_{gy}	Beta	0.1	0.05	0.04	0.01
α_{iap}	Beta	0.1	0.05	0.03	0.01
α_{gp}	Beta	0.1	0.05	0.08	0.02
α_{cd}	Beta	0.1	0.05	0.07	0.02
α_e	Beta	0.1	0.05	0.05	0.01
β_{gy}	Beta	0.5	0.15	0.64	0.11
β_{iap}	Beta	0.5	0.15	0.54	0.11
β_{gp}	Beta	0.5	0.15	0.41	0.13
β_{cd}	Beta	0.5	0.15	0.26	0.12
β_e	Beta	0.4	0.15	0.44	0.08
ρ_1	Beta	0.5	0.15	0.52	0.13
δ_{gy}	Beta	0.1	0.05	0.08	0.05
δ_{iap}	Beta	0.1	0.05	0.15	0.07
δ_{gp}	Beta	0.1	0.05	0.14	0.07
δ_{cd}	Beta	0.1	0.05	0.15	0.08
δ_e	Beta	0.1	0.05	0.1	0.06

ELABORACIÓN: Propia.

En el Cuadro 2, se observa que las distribuciones *posterior* de los parámetros han aprendido de los datos proporcionados en el modelo espacio–estado. Asimismo, se aprecia que la variable del VABNP es la que más depende del factor común (IAE). Por otro lado, el crédito es el que presenta una menor dependencia de este factor dinámico, llegando a presentar un coeficiente de 0,26 en cuanto a captación del desempeño del indicador que se encarga de medir el estado de la economía. Sin embargo, esto no implica que la serie del crédito sea una variable no relevante para el modelo. La razón es que este resultado se obtiene principalmente debido al comportamiento contracíclico que experimentó la serie a causa de la política de reactivación económica (Montoro, 2020) que ejecutó el Gobierno peruano para contrarrestar los efectos recesivos provocados por la pandemia mundial en el año 2020. Considerando que el IAE es un indicador de corto plazo que busca captar el estado actual de la economía, al mismo tiempo de que presenta cierto comportamiento suavizado debido a la ecuación de suavizamiento utilizada, los resultados que se generan por el mismo son considerados como un ejercicio de *nowcasting*.

En el Gráfico 3 se presenta la estimación del IAE (línea sólida) con sus respectivas bandas de credibilidad (líneas discontinuas). Se observa que la región Loreto experimentó cuatro etapas muy marcadas de desaceleración económica, siendo la primera con una clara caída en el año 2009 provocada principalmente por la crisis económica mundial 2008–2009 caracterizada por una gran caída en la demanda externa, disminución en la producción industrial y una clara merma en la inversión privada (Dancourt y Mendoza, 2009).

GRÁFICO 3. Indicador de Actividad Económica (IAE): 2008–2021
(Var. interanual)

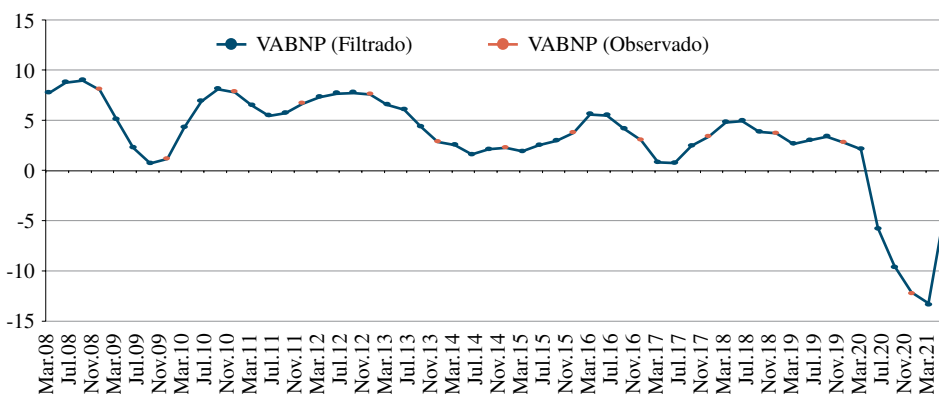


FUENTE: Estimación de los autores en base a datos de INEI, SBS, MEF y Electrorientente.

La siguiente etapa se presenta desde el año 2013 hasta mediados del 2015. Este comportamiento puede explicarse por la desaceleración en el crecimiento regional, nacional y mundial ya que, desde 2010 hasta 2012, Loreto presentó un crecimiento promedio de 7,4% en su VABNP y un 7,63% en su VAB para el 2012. Para el periodo 2013-2015 se observa una caída en el ritmo de crecimiento presentando un valor promedio de 3,02% en el VABNP y un 0,015% en el VAB.

Dentro del contexto externo a la región se tiene que, en periodos contemporáneos, se experimentó un crecimiento del PBI nacional en torno a un 2,4% explicado tanto por choques internos y externos (tales como una caída en los volúmenes de exportación y en los términos de intercambio, una desaceleración de las economías emergentes como la china, entre otros³). La tercera etapa se vincula con la caída abrupta de la producción del canon petrolero de Loreto durante el año 2016, para el cual se presentó un efecto rebote al año siguiente que fue de muy corto plazo ya que la economía loreтана siguió estancada. Finalmente, la cuarta etapa se presenta en el año 2020 en donde se llegó a presentar una caída de hasta 47,46% (se debe recordar que las cifras están calculadas por variación logarítmica lo cual implica la obtención de cifras sean más bajas en comparación a lo obtenido por ratios de tasas de crecimiento) de la actividad económica en el segundo trimestre de tal año, según la cifra reportada por el IAE.

GRÁFICO 4. VAB No Primario: 2008 – 2021
(Var. interanual)



FUENTE: Estimación de los autores en base a datos de INEI, SBS, MEF y Electrorientente.

ELABORACIÓN: Propia.

3 INEI (2015).

Asimismo, tal como se mencionó previamente, la representación del modelo espacio–estado permite estimar los valores no observables (la línea sólida) de la serie con frecuencia anual referida al VABNP (obsérvese el Gráfico 4). Ante ello, se validan los resultados mostrados por el IAE con la diferencia de que para el año 2016 se presentó un comportamiento cíclico caracterizado por (i) iniciar en una fase de recuperación al término del 2015, (ii) lograr un pico en el primer trimestre del año siguiente y (iii) decaer otra vez hasta finales de 2016. Aunque el impacto de la caída en el sector petrolero no se aprecie de manera simultánea, se observa el posible efecto de propagación en el VABNP, presentando una recesión hasta el segundo trimestre de 2017. Se debe recordar que la estimación se realizó en torno al sector no primario de la economía loreтана ya que, hasta el 2015, el sector de extracción de petróleo, gas y minerales representaba en promedio el 29,39% del VAB loreetano, lo cual explica la caída captada por el IAE y el comportamiento del sector no primario que no incluye hidrocarburos.

De acuerdo a las estimaciones correspondientes del IAE y del VABNP, se debe tener cuenta que, si bien ambos tipos de resultados proporcionan información valiosa sobre la situación de la actividad real en una región determinada, sus interpretaciones son algo diferentes. Por un lado, el IAE mide la fortaleza del desempeño económico asociado a esa región durante un trimestre específico y, por tanto, esta información es útil para hacer comparaciones (en frecuencia trimestral) entre las fortalezas actuales con las pasadas de la actividad real regional. Por otro lado, las proyecciones inmediatas que son derivadas del modelo para el VABNP son inferencias actualizadas sobre la tasa a la que se espera que crezca el VABNP de Loreto, determinada durante el año actual.

En otra instancia, el modelo también nos permite estimar los valores del crecimiento de cada año con la información disponible hasta dicho momento de los sectores especificados. De esta manera se puede obtener una predicción sobre el crecimiento del VAB para un año determinado. Esta a su vez se puede realizar debido a la ecuación de suavizamiento que permite pronosticar el IAPD (*Smoothed IAPD*) de Loreto para el último trimestre de cada año (debido a que el INEI publica la cifra oficial entre febrero y marzo del año posterior). Es decir, el valor del crecimiento económico anual del VAB se puede obtener por el crecimiento del valor promedio del IAPD en niveles. En este sentido, la meta es realizar buenas predicciones sobre el crecimiento del IAPD. Por lo tanto, resulta relevante evaluar la capacidad predictiva del modelo a través de la medición del error cuadrático medio (RECM) utilizando los valores efectivos del crecimiento y las proyecciones respectivas para dichos valores, en resumen, un análisis dentro de la muestra.

Sin embargo, considerando que lo que se busca es obtener el mejor predictor para el IAPD de Loreto, es coherente medir el desempeño de las proyecciones suavizadas del modelo espacio–estado con respecto a otro modelo que permita pronosticar. Ante ello se seleccionó un modelo univariado óptimo⁴ AR (1) de la serie del IAPD.

Adicionalmente, considerando el modelo de proyección combinada en la sección de metodología, se calculará tal modelo a fin de compararlo con los anteriores y determinar cuál de ellos minimiza la función de pérdida de error cuadrático medio (ECM).

CUADRO 3. Prueba de Error Cuadrático Medio con Respecto al IAPD

Modelo	ECM
AR (1)	2.53%
<i>Smoothed IAPD</i>	1.98%
Promedio	1.87%

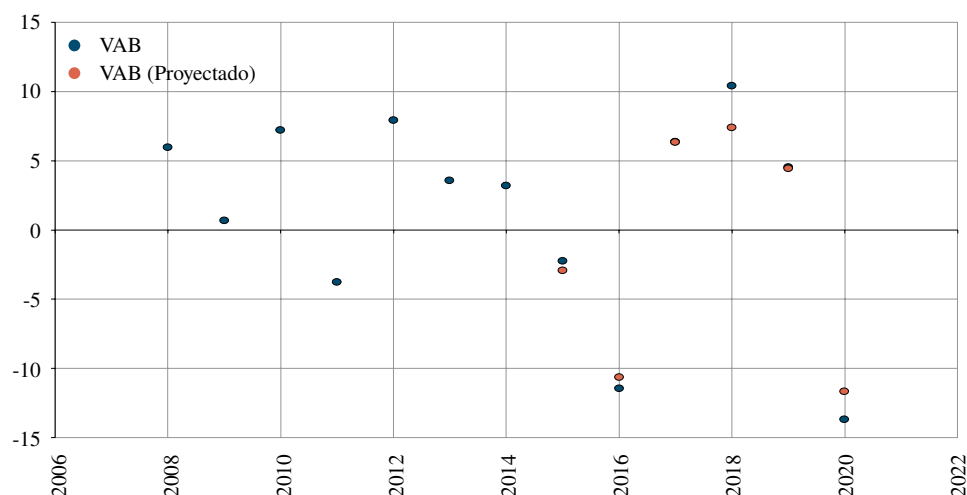
ELABORACIÓN: Propia.

En el Cuadro 3 se obtiene que el modelo que otorga el menor valor del ECM es el promedio (es decir el que realiza la proyección combinada). Por lo tanto, se utilizará este modelo para realizar las proyecciones del VAB anual de Loreto.

4 Modelo óptimo hace referencia al modelo con la cantidad de rezagos que minimiza el criterio de información de Schwarz.

En el **Gráfico 5**, si evaluamos la predicción para los últimos seis años anteriores al 2021 se obtiene una cifra del RECM de 0,0154. Es decir, las proyecciones en promedio se desvían un 1,54% en cada predicción con respecto al valor observado. Considerando la eficiencia de proyección como aquella que se caracteriza por minimizar la función de pérdida (ECM), se puede postular que las proyecciones realizadas sobre el VAB anual de Loreto por el modelo promedio son eficientes.

GRÁFICO 5. *Proyección del VAB de Loreto dentro de la muestra de 2015–2020*
(Var. interanual)

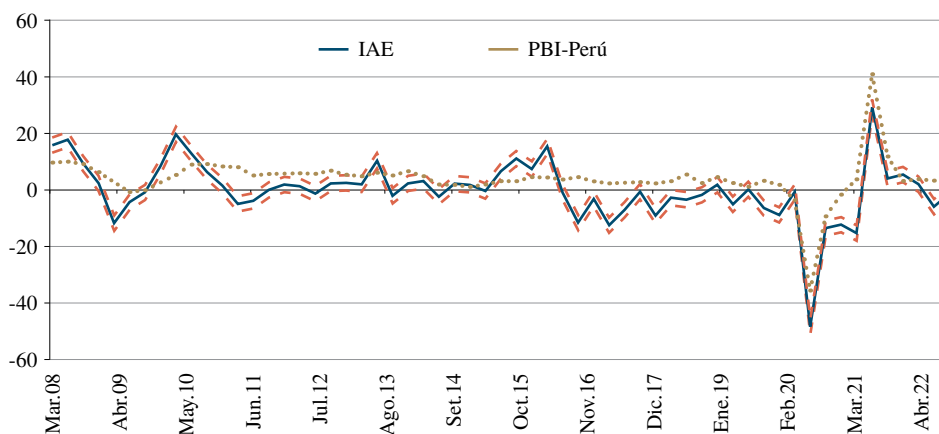


FUENTE: Estimación de los autores en base a datos de INEI, SBS, MEF y Electroriente.

ELABORACIÓN: Propia.

En otra instancia, a manera de validar los resultados obtenidos por el IAE resulta importante compararlos con otros indicadores que se encarguen de medir el comportamiento de la economía. Ante ello, en el **Gráfico 6** se aprecia que el IAE reacciona de manera coincidente y adelantada en ciertos periodos de tiempo ante la dinámica del PBI del Perú. Por ejemplo, tal es el caso del año 2008 en donde se puede apreciar que el IAE capta más rápido la caída de la actividad económica que el PBI. Asimismo, para finales del 2009 se observa que empieza a presentar una recuperación seguida de la recuperación del PBI.

GRÁFICO 6. *IAE y PBI del Perú, 2008-2021*
(Var. interanual)

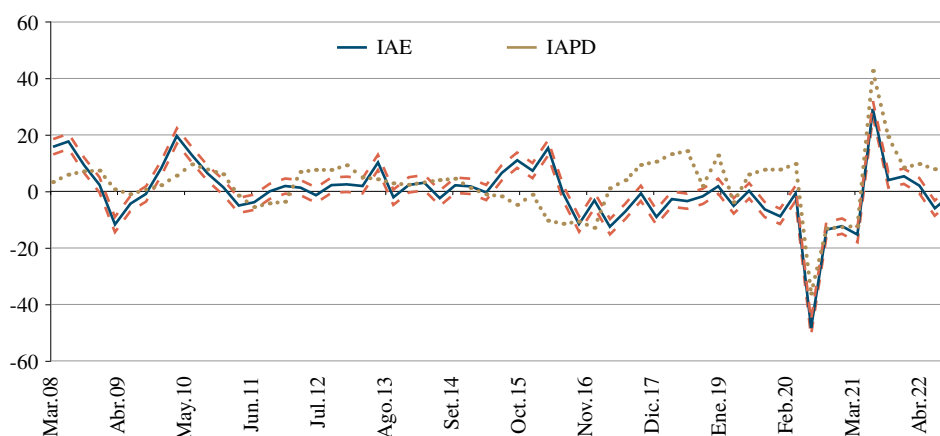


FUENTE: BCRP.

ELABORACIÓN: Propia.

Considerando el desempeño coherente de la dinámica del IAE con la del PBI, se obtiene un nivel alto de correlación contemporánea entre ambos (alcanzando la cifra de 87,5%). Sin embargo, en las series también se observa un periodo de marcada discrepancia. Tal es el caso del lapso desde inicios de 2016 hasta mediados de 2017. El comportamiento del IAE se debe principalmente a la caída en la producción petrolera, teniendo en cuenta que hasta 2015 el sector hidrocarburos era el más productivo, llegando a representar un 22,6% del VAB a nivel sectorial, para pasar a representar en 2016 un nivel por debajo de la mitad del año anterior (10,5% del VAB).

GRÁFICO 7. IAE e IAPD de Loreto, 2008-2021
(Var. interanual)



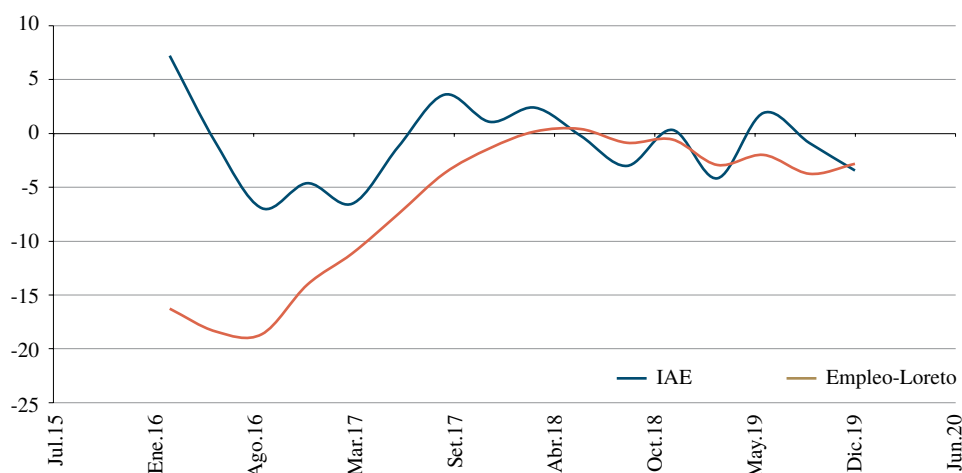
FUENTE: INEI.

ELABORACIÓN: Propia.

Por otro lado, no resulta desmerecedor comparar el comportamiento del IAE respecto al IAPD de Loreto (el cual es elaborado por el INEI). Antes de proceder con el análisis, se debe aclarar que el objetivo del IAE no es predecir el comportamiento del IAPD ni generar un comportamiento idéntico a este sino el otorgar información sobre cómo se encuentra la economía en el corto plazo, considerando información de oferta y de demanda. Sin embargo, dado que ambos tienen el fin de explicar en qué estado se encuentra la economía regional, el desempeño de ambos no debe ser incongruente. En el [Gráfico 7](#) se tiene que, al igual que para el caso del PBI del Perú, el IAE se comporta de manera coincidente y líder en ciertos periodos de tiempo con respecto a la dinámica del IAPD (presentando así un nivel alto de correlación contemporánea de 72,6 %). Sin embargo, se puede observar que en periodos como el de 2016 el IAPD cae mucho más que el IAE. Esto se debe principalmente a que el primero es un indicador que se determina principalmente por el lado productivo. Por lo tanto, recordando la abrupta caída del sector hidrocarburos en dicho periodo, el IAPD se comportó de tal forma.

Por otro lado, durante el año 2018 el IAPD indica que la economía loretana alcanzó su máximo crecimiento con respecto a todo el periodo de tiempo analizado. Ello se sustenta en que el sector minería e hidrocarburos se expandió en 71,2 %, justificado por el incremento del subsector hidrocarburos que a su vez se debió a un mayor nivel de explotación de petróleo crudo (67%). El impulso se dio básicamente por la empresa petrolera Pacific Stratus en el lote 192, a la cual se suma el aporte de las compañías Petrotal Perú (lote 95) y Perenco (lote 67) que reportaron producción desde julio y setiembre de 2018, respectivamente (INEI, 2019).

GRÁFICO 8. IAE y Crecimiento del Empleo de Loreto, 2016-2019
(Var. interanual)



FUENTE: MINTRA.

ELABORACIÓN: Propia.

De esta manera, se podría esperar que el 2018 fuera un gran año para la economía loreтана. Sin embargo, la realidad no fue así ya que se tiene el caso de la dinámica macroeconómica del nivel de empleo, la cual presentó un estancamiento desde el 2018 hasta el 2019⁵. Ante ello, el comportamiento del IAE realiza un buen desempeño en cuanto a medir tales situaciones de sobreestimación de la actividad económica. En el [Gráfico 8](#) se observa una reacción coherente del IAE ante la evolución del crecimiento del empleo de Loreto.

Por lo tanto, el funcionamiento del IAE es muy útil para ayudar a explicar cómo se encuentra el estado de la actividad económica en Loreto y, de esta manera, contribuir a la población loreтана (empresarios, académicos y autoridades encargadas de hacer política, entre otros) en el sentido de permitirles contar con más información tanto al momento de proponer como de ejecutar decisiones importantes en beneficio propio y/o en el de la región.

Finalmente, es plausible mencionar que el modelo planteado en esta sección puede ser replicado para medir la actividad económica de las demás regiones del país (considerando la literatura revisada y los criterios analítico-metodológicos desarrollados y explicados en el presente artículo).

6. CONCLUSIONES

En el presente artículo se buscó estudiar dos puntos principales, siendo el primero el desarrollo de un indicador de actividad económica (IAE) que muestre el estado de la economía considerando información proveniente tanto de factores de oferta como de demanda. Adicionalmente, el desarrollo del IAE permite estimar el crecimiento latente del VABNP no observado. El segundo punto es el desarrollo de un predictor óptimo del crecimiento anual del VAB de Loreto, utilizando como información secundaria del IAPD y las estimaciones suavizadas del mismo con el modelo.

De esta manera, se obtiene que el IAE otorga información valiosa sobre el estado de la economía Loreтана en el corto plazo. Esto se comprueba en la gran capacidad de captar el comportamiento de la

⁵ Según cifras oficiales publicadas por la Encuesta Nacional de Variación Mensual del Empleo a cargo del Ministerio de Trabajo y Promoción del Empleo (MINTRA).

economía interna y externa a la región, puesto que presenta una gran congruencia con la dinámica del PBI del Perú y con la del IAPD de Loreto. Además, dado que el IAE es un indicador que otorga señales sobre el estado de la economía en general, se observa que es de gran utilidad cuando el IAPD puede sobreestimar la actividad económica en ciertos periodos de tiempo. Tal es el caso del año 2018 cuando el IAPD otorgó valores muy altos de crecimiento pero el nivel de empleo se mantuvo estancado.

Continuando con el análisis del segundo objetivo, se desarrolló un modelo de proyección combinada que permite realizar pronósticos eficientes (con un margen de error de 1,5%) del crecimiento del VAB de Loreto. Asimismo, esta herramienta permite que tales proyecciones se puedan realizar de forma anticipada a la publicación oficial de la cifra oficial por parte del INEI.

Finalmente, cabe mencionar que se deja la puerta abierta para investigaciones adicionales (por ejemplo, la implementación del IAE a las demás economías regionales). Teniendo en cuenta que este es el primer trabajo que busca representar lo no observado en la actividad económica de Loreto, naturalmente se espera que surjan demás investigaciones tanto para dicho enfoque como para el estudio del ciclo económico loreto.

REFERENCIAS

- Aruoba, S. B. y Sarikaya, C. (2013). A Real Economic Activity Indicator for Turkey. *Central Bank Review*, 13(1):15–29.
- Burns, A. F. y Mitchell, W. C. (1946). *Measuring Business Cycles*. National Bureau of Economic Research, Inc.
- Dancourt, O. y Mendoza, W. (2009). *Perú 2008-2009: del auge a la recesión. Choque externo y respuestas de política macroeconómica*. Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
- De Jong, P. (1988). A cross-validation filter for time series models. *Biometrika*, 75(3):594–600.
- De Jong, P. (1989). Smoothing and interpolation with the state-space model. *Journal of the American Statistical Association*, 84(408):1085–1088.
- Gil, M., Leiva-Leon, D., Pérez, J. J., y Urtasun, A. (2019). An application of dynamic factor models to nowcast regional economic activity in Spain. Occasional Papers 1904, Banco de España.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, Structural Time Series and the Kalman Filter*. Cambridge University Press.
- Harvey, A. C. (2006). Forecasting with unobserved components time series models. En Elliott, G., Granger, C., y Timmermann, A., editores, *Handbook of Economic Forecasting, volumen 1 de Handbook of Economic Forecasting*, capítulo 7. Elsevier.
- Hausmann, R., Santos, M., Muci, F., Pye, J., Grisanti, A., y Lu, J. (2020). Diagnóstico del crecimiento de Loreto: Principales restricciones al desarrollo sostenible. Working Paper 382, Center for International Development at Harvard University.
- INEI (2015). *Perú: Cuentas Nacionales 1950-2014*.
- INEI (2019). Indicador de la actividad productiva departamental. Informe Técnico 1 - marzo.
- Koopman, S. (1998). Kalman filtering and smoothing. En Armitage, P. y Colton, T., editores, *Encyclopedia of Biostatistics*. John Wiley & Sons.
- Mariano, R. S. y Murasawa, Y. (2003). A new coincident index of business cycles based on monthly and quarterly series. *Journal of Applied Econometrics*, 18(4):427–443.
- Mendoza, W. y Gallardo, J. (2012). Barreras al crecimiento económico de Loreto. Informe Final para el JICA del Estudio de Caso sobre las Barreras del Crecimiento en la Región Loreto.
- Montoro, C. (2020). El programa Reactiva Perú. *Revista Moneda*, (182):24–33.
- Ng, D. W. W., Koh, S. K., Sim, S. Z., y Lee, M. C. (2018). The study of properties on generalized beta distribution. *Journal of Physics: Conference Series*, 1132(1):012080.
- Pérez, J. y Brens, P. (2018). Modelos de factores dinámicos para pronósticos de la actividad económica en tiempo real. Serie de documentos de investigación 2018-02, Ministerio de Hacienda - República Dominicana.

Stock, J. H. y Watson, M. W. (1988). A Probability Model of The Coincident Economic Indicators. NBER Working Papers 2772, National Bureau of Economic Research, Inc.

Terrones, M. y Calderon, C. (1993). El ciclo económico en el Perú. Working Papers 42247, Group for the Analysis of Development (GRADE).

Winkelried, D. (2017). Cronología de los ciclos económicos en el Perú: 1992 a 2016. *Revista Estudios Económicos*, (34):55–76.

APÉNDICE

ESTIMACIÓN DEL MODELO DE FACTOR DINÁMICO BAYESIANO

Teniendo en cuenta la estructura presentada previamente del modelo, de manera matricial se puede expresar lo siguiente

$$y_t = \mu + Hs_t \quad (\text{A.1})$$

$$s_t = Fs_{t-1} + Gv_t \quad (\text{A.2})$$

Donde,

$$y_t = \begin{pmatrix} gy_t \\ iap_t \\ gp_t \\ cd_t \\ e_t \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{gy}}{4} & \frac{\beta_{gy}}{4} & \frac{\beta_{gy}}{4} & \frac{\beta_{gy}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{iap} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{gp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{cd} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \alpha_{gy} \\ \alpha_{iap} \\ \alpha_{gp} \\ \alpha_{cd} \\ \alpha_e \end{pmatrix}$$

$$s_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \vdots \\ x_{t-3} \\ u_{gy,t} \\ \vdots \\ u_{gy,t-3} \\ u_{iap,t} \\ u_{gp,t} \\ u_{cd,t} \\ u_{e,t} \end{pmatrix}$$

$$v_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{x,t} \\ \varepsilon_{iap,t} \\ \varepsilon_{gp,t} \\ \varepsilon_{cd,t} \\ \varepsilon_{e,t} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{gy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{iap} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{gp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{cd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_e \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta representación sigue a [Stock y Watson \(1988\)](#), en donde se establece la restricción del orden máximo de rezagos (p, q) correspondientes a los rezagos del factor dinámico y de los factores idiosincráticos, dicha restricción establece que $p, q \leq 4$.

Siguiendo a [Mariano y Murasawa \(2003\)](#) se procederá a detallar la derivación de la metodología. De esta manera, se determinará la función de verosimilitud para la posterior estimación y el detalle puntual del algoritmo del Filtro de Kalman. Para ello, se define a θ como el vector de parámetros. Asimismo, se tiene $\{y_{1,t}^+\}_{t=-\infty}^{\infty}$ para todo t ,

$$y_{1,t}^+ = \begin{cases} y_{1,t} & \text{si } y_{1,t} \text{ es observable} \\ z_t & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde z_t es una simulación aleatoria de una distribución que no depende de θ . Sea $t \geq 1$, $y_t = (y_1, \dots, y_t)$ y $y_t^+ = (y_1^+, \dots, y_t^+)$. Dado que z_t 's son independientes de y_t por construcción, se puede escribir una función de densidad de probabilidad (PDF) conjunta de y_t^+ como

$$f(y_T^+; \theta) = f(y_T; \theta) \prod_{t \in A} f(z_t)$$

donde $y_{1,t}$ es faltante para $t \in A \subset [1, \dots, T]$; por lo tanto, la función de verosimilitud de θ dado y_T y y_T^+ dado son equivalentes a escala. Se trabajará y_T^+ con puesto que no contiene observaciones faltantes.

La distribución de z_t puede ser cualquiera siempre que no dependa de θ , para este caso se asumirá que $z_t \sim N(0, I_{N_1})$, donde N_1 representa el tamaño de la secuencia aleatoria variable considerando del indicador con frecuencia anual observable cada cuatro periodos considerando las observaciones faltantes. Dado que la estimación bayesiana de la función de verosimilitud dado y_T^+ no depende de z_t , se establecerá $z_t = 0$ para su realización.

Nótese que para el presente caso, $y_{1,t}^+$ hace referencia a la variable VAB No Primario considerando sus valores faltantes *a priori*. Continuando, se puede derivar un modelo espacio – estado para $\{y_t^+\}_{t=-\infty}^{\infty}$, de modo que se puede aplicar el Filtro de Kalman para evaluar la función de verosimilitud de θ dado y_T^+ . Escribamos (A.1) como

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} s_t$$

Entonces para todo t ,

$$\begin{pmatrix} y_{1,t}^+ \\ y_{2,t}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} H_{1,t} \\ H_2 \end{bmatrix} s_t + \begin{pmatrix} w_{1,t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde

$$\mu_{1,t} = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } y_{1,t} \text{ es observable} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$H_{1,t} = \begin{cases} H_1 & \text{si } y_{1,t} \text{ es observable} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$w_{1,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } y_{1,t} \text{ es observable} \\ z_t & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Así, se puede tener un modelo espacio – estado para $\{y_t^+\}_{t=-\infty}^{\infty}$, dado que para todo t

$$y_t^+ = \mu + H s_t$$

$$s_t = F s_{t-1} + G v_t$$

Sea para $t \geq 1$,

$$\mu_{t|t-1} = E(y_t^+ | y_{t-1}^+; \theta)$$

$$\Sigma_{t|t-1} = Var(y_t^+ | y_{t-1}^+; \theta)$$

Donde $y_0^+ = \emptyset$. Entonces para $t \geq 1$,

$$f(y_t^+ | y_{t-1}^+; \theta) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \det(\Sigma_{t|t-1})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_t^+ - \mu_{t|t-1})' \Sigma_{t|t-1}^{-1} (y_t^+ - \mu_{t|t-1})\right).$$

Por tanto, la función de verosimilitud es

$$L(\theta; y_T^+) = (2\pi)^{-\frac{NT}{2}} \det(\Sigma_{t|t-1})^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (y_t^+ - \mu_{t|t-1})' \Sigma_{t|t-1}^{-1} (y_t^+ - \mu_{t|t-1})\right).$$

Con respecto al Filtro de Kalman, [Harvey \(1989\)](#) y [Hamilton \(1994\)](#) describen a detalle su metodología, aun así se puede expresar las ecuaciones de actualización, predicción y suavizamiento.

Se tiene que la ganancia de Kalman para $t \geq 1$,

$$B_t = P_{t|t-1} H'_t (H_t P_{t|t-1} H'_t + \Sigma_{w,t})^{-1}$$

donde $\Sigma_{w,t}$ representa la matriz de covarianzas $w_{1,t}$. Las ecuaciones de predicción para el vector de estado y su matriz de covarianzas son para $t \geq 1$,

$$\hat{s}_{t|t-1} = F \hat{s}_{t-1|t-1}$$

$$P_{t|t-1} = F P_{t-1|t-1} F' + G \Sigma_v G'$$

donde se debe tener en cuenta que para un $s, t \geq 0$,

$$\hat{s}_{t|s} = E(s_t | y_s^+; \theta)$$

$$P_{t|s} = Var(s_t | y_s^+; \theta).$$

Además que Σ_v es la matriz de covarianzas de v_t . Las ecuaciones de actualización para el vector de estado y su matriz de covarianzas son para $t \geq 1$,

$$\hat{s}_{t|t} = \hat{s}_{t|t-1} + B_t (y_t^+ - \mu_t - H_t \hat{s}_{t|t-1})$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - B_t H_t P_{t|t-1}.$$

A continuación se tiene que la ecuación de suavizamiento del vector de estado, considerando lo demostrado por [De Jong \(1988, 1989\)](#) y [Koopman \(1998\)](#), se expresa para $t = 1, \dots, T + 1$,

$$\hat{s}_{t|T} = \hat{s}_{t|t} + P_{t|t-1} r_t$$

Donde

$$r_t = H'_t (H_t P_{t|t-1} H'_t + \Sigma_{w,t})^{-1} (y_t^+ - \mu_t - H_t \hat{s}_{t|t-1}) + (I + H'_t B'_t) F' r_{t+1}.$$

El algoritmo inicia cuando $r_{T+1} = 0$, y se itera para $t = T, \dots, 1$.

Finalmente, a diferencia de [Mariano y Murasawa \(2003\)](#), dado que se realizarán las estimaciones con técnicas bayesianas se buscará obtener la siguiente función de densidad de probabilidad posterior para θ considerando la función de verosimilitud detallada, se tiene

$$P(\theta|\{y_t^+\}_{t=1}^T) = \frac{P(\{y_t^+\}_{t=1}^T|\theta) P(\theta)}{P(\{y_t^+\}_{t=1}^T)} \propto P(\{y_t^+\}_{t=1}^T|\theta) P(\theta).$$

De lo cual se obtendrá maximizando numéricamente $P(\theta|\{y_t^+\}_{t=1}^T)$ los resultados correspondientes θ^{moda} y Σ_{θ}^{moda} , permitiendo así la utilización del algoritmo derivado hasta el momento. Nótese que $P(\{y_t^+\}_{t=1}^T|\theta) = L(\theta; y_T^+)$.